Équations

DÉFINITION :

Une équation est une égalité
contenant une inconnue souvent notée x.
Résoudre une équation, c'est déterminer
toutes les valeurs de x vérifiant l'égalité.

1- Équation du type ax + b = cx + d

Pour résoudre une équation de type ax + b = cx + d, il existe une méthode générale qui se décompose en plusieurs étapes :

a) Regrouper les termes contenant la variable x d'un côté de l'équation :
On soustrait cx des deux côtés de l'équation pour obtenir : ax - cx + b = d
Ce qui peut être simplifié en : (a - c)x + b = d

b) Isoler la variable x :
On soustrait b des deux côtés de l'équation : (a - c)x = d - b

c) Résoudre pour x :
- *Si $a = c$ alors on a 0x = d – b ce qui est équivalent à 0 = d – b et donc vrai si et seulement si d = b (donc dans ce cas si d = b il y a une infinité de solutions car 0x = 0 est toujours vrai quel que soit x, et si d ≠b alors il n'y a pas de solution car on aurait 0 égal à un nombre différent de 0, ce qui est impossible)*
- $Si\ a \neq c$

On divise chaque côté de l'équation par (a - c) :

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

Exemple :

Supposons que nous ayons l'équation 6x + 5 = 2x + 9.

a) Regrouper les termes : 6x - 2x + 5 = 9
Ce qui donne : 4x + 5 = 9

b) Isoler x
4x = 9 - 5

c) Résoudre pour x :
x = 4/4 et donc x = 1

2- Équation du type (ax + b)(ca + d) = 0

PROPRIÉTÉ :

Les solutions de l'équation $(ax + b)(ca + d) = 0$
sont les solutions de chacune des équations
$ax + b = 0$ ***et*** $cx + d = 0$

Exemple :

Résoudre l'équation $(3x+5)(-5x-8)=0$

On résout séparément les équations $3x+5=0$ et $-5x-8=0$:

$3x+5=0$	$-5x-8=0$
$3x=-5$	$-5x=8$
$x=\frac{-5}{3}$	$x=-\frac{8}{5}$

L'équation de départ a deux solutions : $-\frac{5}{3}$ et $-\frac{8}{5}$.

Factoriser une expression

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la résolution de l'équation :
$(1 - x)(4x + 3) - (x + 2)(1 - x) = 0$
Nous allons résoudre cette équation
en écrivant le membre de gauche sous forme d'un produit.

DÉFINITION

Factoriser une expression,
c'est transformer une somme en un produit.

Exemple :

Factoriser l'expression suivante : $A = (1 - x)(4x + 3) - (x + 2)(1 - x)$

A est une somme. Les deux termes qui interviennent sont $(1-x)(4x+3)$ et $(x+2)(1-x)$. ces deux termes ont un facteur commun : $(1-x)$ .On utilise alors la relation $k\times a-k\times b=k\times(a-b)$, où $(1-x)$ joue le rôle de k, $(4x+3)$ joue le rôle de a et $(x+2)$ joue le rôle de b. on a alors :

$(1-x)(4x+3)-(x+2)(1-x)=(1-x)\big((4x+3)-(x+2)\big)$

Cette dernière expression est un produit. Il reste à simplifier la deuxième parenthèse :

$$(1-x)\big((4x+3)-(x+2)\big)=(1-x)(4x+3-x-2)$$
$$=(1-x)(3x+1)$$

On a bien écrit l'expression A sous la forme d'un produit : le produit de $(1-x)$ par $(3x+1)$

Nous pouvons alors résoudre l'équation de départ, qui s'écrit plus simplement : $(1-x)(3x+1)=0$

$1-x=0$	$3x+1=0$
$x=1$	$3x=-1$
	$x=-\frac{1}{3}$

L'équation de départ a deux solutions : 1 et $-\frac{1}{3}$.

