

## Racines carrées

### DÉFINITION :

Si  $a$  désigne un nombre positif,  
on appelle **racine carrée de  $a$** , notée  $\sqrt{a}$ ,  
le nombre positif dont le carré est  $a$ .



### Exemples :

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{car } 3^2 = 9$$

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{car } 5^2 = 25$$

### Conséquence :

Si  $a$  désigne un nombre positif, on a :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

### Remarque :

On ne peut pas toujours donner une valeur décimale exacte de la racine carrée d'un nombre positif.

Par exemple pour  $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$  est le nombre positif dont le carré vaut 2.

$$\text{On a } (\sqrt{2})^2 = 2.$$

On ne peut pas donner de valeur décimale exacte de  $\sqrt{2}$ .

On a  $\sqrt{2} \approx 1,414$  (c'est une valeur approchée de 2 au millième).

### PROPRIÉTÉS :

Si  $a$  et  $b$  désignent deux nombres positifs :

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- Si  $b \neq 0$ ,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$



Exemples :

- Écrire les nombres suivants sous la forme  $a\sqrt{b}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers :  $\sqrt{75}$  et  $\sqrt{28}$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

- Écrire le nombre suivant sous la forme  $a\sqrt{b}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers :  $A = 3\sqrt{50} - 2\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{On a donc } A = 3 \times 5\sqrt{2} - 2 \times 4\sqrt{2} + 6 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 18\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

Attention : ici, on a pu additionner mais on ne peut additionner  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  par exemple

Pour  $A$  on a  $15\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 18\sqrt{2} = (15 - 8 + 18) \times \sqrt{2} = 25\sqrt{2}$  en factorisant, ce qui n'est pas possible si on a des racines carrées différentes.

## Équations $x^2 = a$

### PROPRIÉTÉ

L'équation  $x^2 = a$ , où  $x$  est l'inconnue et  $a$  est un nombre :

- a deux solutions si  $a > 0$  :  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$
- a une seule solution qui est 0 si  $a = 0$
- n'a pas de solution si  $a < 0$



### Démonstration :

Si  $a > 0$  :

$$x^2 = a$$

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$$

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$$

L'équation  $x + \sqrt{a}$  a pour solution  $-\sqrt{a}$  et l'équation  $x - \sqrt{a} = 0$  a pour solution  $\sqrt{a}$

L'équation de départ a donc deux solutions  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$

Si  $a = 0$  alors  $x^2 = 0$  et donc  $x = 0$

Si  $a < 0$  alors l'équation n'admet pas de solutions car le carré d'un nombre ne peut pas être négatif

### Exemples :

L'équation  $x^2 = 5$  a deux solutions :  $\sqrt{5}$  et  $-\sqrt{5}$

L'équation  $x^2 = -3$  n'a pas de solution