Probabilités

DÉFINITION :

Une expérience est aléatoire lorsqu'elle comporte plusieurs résultats ou issues possibles
et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude
quel résultat se produira.

Exemples :

- On lance un dé non truqué et on note le résultat obtenu. Les issues possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
- On tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules bleues et 5 boules vertes, et on note la couleur de la boule tirée. Les issues possibles sont : vert, rouge ou bleu.

PROPRIÉTÉ :

À chaque issue correspond une probabilité,
qui est un nombre compris entre 0 et 1.

Exemples :

- On lance un dé non truqué et on note le résultat obtenu. Les issues possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
  $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \dfrac{1}{6}$
  On a une chance sur 6 d'obtenir 1, une chance sur 6 d'obtenir 2, etc…
- On tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules bleues et 5 boules vertes, et on note la couleur de la boule tirée. Les issues possibles sont : vert, rouge ou bleu.
  $p(rouge) = \dfrac{3}{10}$, $p(bleu) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ et $p(vert) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$
  On a 3 chances sur 10 d'obtenir une boule rouge, 1 chance sur 5 d'obtenir une boule bleue et 1 chance sur 2 d'obtenir une boule verte.

PROPRIÉTÉ :

La somme des probabilités
des issues d'une expérience est égale à 1.

Exemples :

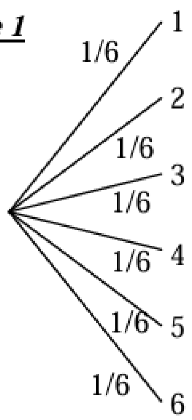
- On lance un dé non truqué et on note le résultat obtenu. Les issues possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
  P(1) = p(2) = p(3) =p(4) = p(5) = p(6) = 1/6
  $$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$
- On tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules bleues et 5 boules vertes, et on note la couleur de la boule tirée. Les issues possibles sont : vert, rouge ou bleu.
  P(rouge) = 3/10 ; p(bleu) = 2/10=1/5 ; p(vert) = 5/10 = ½
  $$p(rouge)+p(bleu)+p(vert)=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{10}{10}=1$$

Lien avec les fréquences : Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un évènement devient proche de sa probabilité.

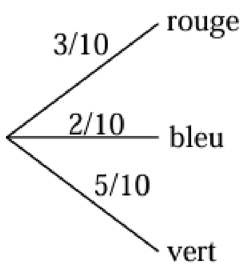
Exemples :
Si on lance 1000 fois le dé, la fréquence de "6" sera proche de 0,167, qui est un valeur approchée de 1/6 .

Chaque expérience peut être représentée par un arbre :

Exemple 1



Exemple 2



Notion d'évènement

DÉFINITION

Un évènement est constitué d'une ou plusieurs issues d'une expérience aléatoire.
Un évènement est impossible s'il ne peut pas se produire.
Un évènement est certain s'il se produit forcément.

PROPRIÉTÉ :

- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet évènement.
- La probabilité d'un évènement impossible est égale à 0.
- La probabilité d'un évènement certain est égale à 1.

Exemples :

- On appelle A l'évènement "obtenir au moins 4", B l'évènement "obtenir 8" et C l'évènement "obtenir un nombre entier.
  $p(A) = p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
  $p(B) = 0$ (il est impossible d'obtenir 8).
  $p(C) = 1$ (on est certain d'obtenir un nombre entier).

- On appelle A l'évènement "obtenir une boule bleue ou verte", B l'évènement "obtenir une boule bleue, verte ou rouge" et C l'évènement "obtenir une boule jaune".
  $p(A) = p(bleu) + p(vert) = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$
  $p(B) = 1$ et $p(C) = 0$.

DÉFINITION

Deux évènements sont incompatibles
s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.
L'évènement contraire d'un évènement A
est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
On le note non A.

PROPRIÉTÉ :

- Lorsque deux évènements sont incompatibles, la probabilité pour que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leur probabilités.

- La somme des probabilités d'un évènement et de son contraire est égale à 1.

Exemple :

➢ Si on note A l'évènement "on obtient 5 ou 6" et B l'évènement "on obtient au moins 2".

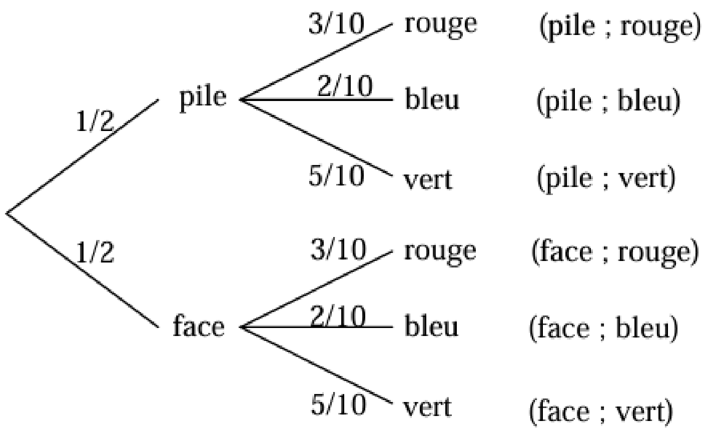
$p(A) = p(5) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (les évènements "obtenir 5" et "obtenir 6" sont incompatibles).

L'évènement contraire de B est "obtenir 1".

$p(B) + p(1) = 1$ donc $p(B) = 1 - p(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Expérience aléatoire à deux épreuves

On lance une pièce de monnaie et on note si on obtient pile ou face, puis on tire une boule dans l'urne de l'exemple 2. On peut représenter l'arbre correspondant à cette expérience aléatoire :



PROPRIÉTÉ :

Avec un arbre, la probabilité d'une issue
est égale au produit des probabilités
rencontrées au cours du chemin conduisant à cette issue.

Exemples :

$$p(pile\,;\,bleu) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$$

$$p(face\,;\,vert) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$