Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

DÉFINITION :

Un système de deux équations à deux inconnues
est constitué de deux égalités contenant chacune deux inconnues,
souvent notées x et y.
Une solution d'un système est donc constituée de deux nombres
(une valeur pour x et une valeur pour y),
tels que les égalités soient vérifiées.

Exemple :

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

C'est un système de deux équations à deux inconnues : x *et* y.
Pour le résoudre il faut trouver les deux nombres qui vérifient les deux équations.
Il existe plusieurs façons de trouver ces nombres.

RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION :

Elle consiste à isoler une inconnue à l'aide d'une des deux équations.
Par exemple, en utilisant la 2ème équation, on a $y = 2x - 5$
On remplace alors y *par* $2x - 5$ dans la 1ère équation :

$3x + 2(2x - 5) = 4$

$3x + 4x - 10 = 4$

$7x = 4 + 10$

$7x = 14$

$x = \dfrac{14}{7}$

On remplace ensuite x par le résultat trouvé, ici 2, dans la première équation :

$3 \times 2 + 2y = 4$

$6 + 2y = 4$

$2y = -2$

$y = \dfrac{-2}{2}$

$y = -1$

On vérifie en remplaçant x *par* 2 *et* y *par* -1 dans les deux équations :
$3 \times 2 + 2 \times (-1) = 6 - 2 = 4$ ce qui est bien le résultat recherché
$-2 \times 2 + (-1) = -4 - 1 = -5$ ce qui est bien le résultat recherché
Conclusion : le couple (2; -1) est la solution du système.

RÉSOLUTION PAR COMBINAISON :

Elle consiste à faire apparaître le même nombre de x (ou de y) dans les deux équations.
Ici, on peut par exemple multiplier la 2ème équation par 2 afin d'avoir le même nombre de y :

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ -2x+y=-5 \quad (\times 2) \end{cases} \text{ devient } \begin{cases} 3x+2y=4 \\ -4x+2y=-10 \end{cases}$$

On soustrait ensuite membre à membre les deux égalités pour qu'il n'y ait plus de y :

$(3x + 2y) - (-4x + 2y) = 4 - (-10)$
$3x + 2y + 4x - 2y = 14$
$7x = 14$
$x = \frac{14}{7}$
$x = 2$

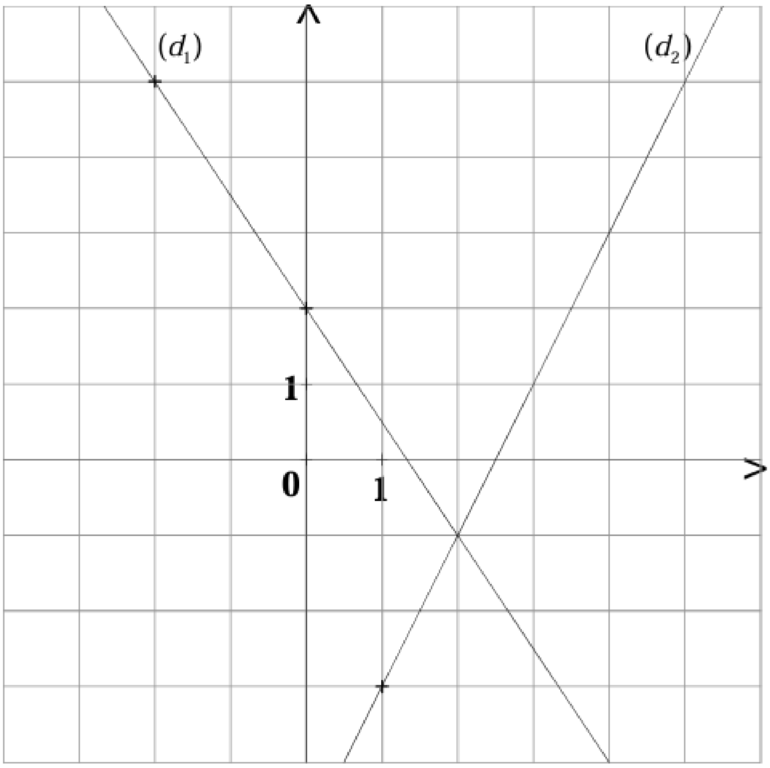
On remplace $x \ par$ 2 dans la 1ère équation et on conclut de la même manière que l'autre méthode.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

$3x+2y=4$ s'écrit aussi $y=-\frac{3}{2}x+2$. sous cette forme, on reconnaît l'équation d'une droite (d_1), représentation graphique de la fonction affine $f:x\mapsto -\frac{3}{2}x+2$. De même, $-2x+y=-5$ s'écrit aussi $y=2x-5$, qui est l'équation de la droite (d_2), représentation graphique de la fonction affine $g:x\mapsto 2x-5$.

(d_1) passe par les points de coordonnées $(0\,;2)$ et $(-2\,;5)$.

(d_2) passe par les points de coordonnées $(0\,;-5)$ et $(1\,;-3)$.



La solution du système est constituée des coordonnées du point d'intersection des deux droites : $(2\,;-1)$.

Exemple de résolution d'un problème

ÉNONCÉ :

Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boîtes. Léa achète 6 boîtes et 5 albums et paie 57 €. Hugo achète 3 boîtes et 7 albums et paie 55,50 €. Quel est le prix d'une boîte ? Quel est le prix d'un album ?

Etape 1 : choix des inconnues
Appelons x le prix d'une boîte et y le prix d'un album.

Etape 2 : mise en équations
Traduction de la première phrase : $6x+5y=57$.
Traduction de la deuxième phrase : $3x+7y=55,5$

Etape 3 : Résolution du système $\begin{cases} 6x+5y=57 \\ 3x+7y=55,5 \end{cases}$

En multipliant la deuxième équation par 2, on obtient le système : $\begin{cases} 6x+5y=57 \\ 6x+14y=111 \end{cases}$.

On soustrait membre à membre les deux égalités :

$(6x+5y)-(6x+14y)=57-111$

$6x+5y-6x-14y=-54$

$-9y=-54$

$y=\dfrac{-54}{-9}$

$y=6$

On remplace y par 6 dans la première équation :

$6x+5\times6=57$

$6x+30=57$

$6x=57-30$

$6x=27$

$x=\dfrac{27}{6}$

$x=4,5$

Vérification :

$6\times4,5+5\times6=57$

$3\times4,5+7\times6=55,5$

Conclusion : $(4,5;6)$ est la seule solution du système.

Etape 4 : Retour au problème posé
Une boîte coûte 4,5 € et un album coûte 6 €.